Biharmonic Bergman space and its reproducing kernel (General topics on applications of reproducing kernels)

田中, 清喜

数理解析研究所講究録
第1980巻 2016年 52-55

Biharmonic Bergman space and its reproducing kernel

大阪市立大学数学研究所研究員　田中清喜
Osaka City University Advanced Mathematical Institute Reseacher
Kiyoki Tanaka

概要

重み付き重調和ベルグマン空間 $b_{\alpha,\beta}^{2,2}(D)=H_{2}(D)\cap L^{2}(D,|x|^{\alpha}|1-|x|^{2}|^{\beta}dx)$ を考える。ここで、D は単位球 $\mathbb{B}$, 穴空き単位球 $\mathbb{B}\setminus\{0\}$ もしくは外部領域 $\mathbb{R}^{N}\setminus\overline{\mathbb{B}}$ とし、$H_{2}(D)$ は D 上の重調和関数全体を表す。重み付きベルグマン空間の再生核の表示についていくつかの結果が得られ論文投稿準備中であるため、その予報としてRIMS講究録の紙面を使わせて頂く。

重み付き重調和ベルグマン空間 $b_{\alpha,\beta}^{2,2}(D)$ を考える。平均値の定理より、この空間は再生核ヒルベルト空間であることがわかる。この再生核を $R_{D,2,\alpha,\beta}(x,y)$ とする。本講究録ではこの再生核の形について得られた結果を紹介する。先行結果としては、D 上調和関数によって成されるベルグマン空間(調和ベルグマン空間と呼び $b_{\alpha,\beta}^{1,2}(D):=\mathrm{Harm}(D)\cap L^{2}(D,|x|^{\alpha}|1-|x|^{2}|^{\beta}dx)$ とする)は再生核ヒルベルト空間でありその再生核($R_{D,1,\alpha,\beta}$)は $\alpha=\beta=0$ かつ $D=\mathbb{B}$ のときはexplicitな形が知られている(例えば[1]を見よ)。その他にも、$\mathbb{B}$ 上における重み $(1-|x|^{2})^{\beta}dx$(ただし $\beta>-1$) を持つ調和ベルグマン空間の再生核は表示が知られており([6],[10])、その再生核(直交射影)によって構成されるテプリッツ作用素が有界性、コンパクト性等を満たすための必要十分条件が研究されている。$\mathbb{B}$ 以外の領域にたいしても、Z.G.Zhao[11]によって $\mathbb{R}^{N}\setminus\overline{\mathbb{B}}$ もしくは $\mathbb{B}\setminus\{0\}$ における重みを考えない調和ベルグマン空間の再生核の形が与えられている。我々の与える結果は、重み $|x|^{\alpha}|1-|x|^{2}|^{\beta}dx$ を持つ D 上の調和ベルグマン空間もしくは重調和ベルグマン空間の再生核の形と $\mathbb{B}$ 上の調和ベルグマン空間の再生核と $\mathbb{R}^{N}\setminus\overline{\mathbb{B}}$ 上の調和ベルグマン空間の再生核の関係である。本結果の証明は準備中である論文に任せて結果だけを報告させて頂く。$Z_{k}(x,y)$ をzonal harmonicとするとき $\mathbb{B}$ 上の重み付きの調和ベルグマン空間及び重調和ベルグマン空間の再生核は以下で表される。

Theorem 1. *Let $N+\alpha>0$ and $\beta>-1$. Then, we have*

$$R_{\mathbb{B},1,\alpha,\beta}(x,y)=\frac{2}{|\mathbb{S}|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{N+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+\frac{N+\alpha}{2})}Z_{k}(x,y)$$

for $x,y\in\mathbb{B}$.

Theorem 2. *For $N+\alpha>0$ and $\beta>-1$, we have*

$$\begin{aligned}R_{\mathbb{B},2,\alpha,\beta}(x,y) =&\frac{2}{|\mathbb{S}|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{N+\alpha}{2}+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+\frac{N+\alpha}{2})}Z_k(x,y)\\&+\frac{2}{|\mathbb{S}|}|x|^2|y|^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+\frac{N+\alpha}{2}+\beta+1)\Gamma(k+\frac{N+\alpha}{2}+\beta+3)}{\Gamma(\beta+2)\Gamma(k+\frac{N+\alpha}{2}+1)}Z_k(x,y)\\&-\frac{2}{|\mathbb{S}|}(|x|^2+|y|^2)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{N+\alpha}{2}+\beta+3)}{\Gamma(\beta+2)\Gamma(k+\frac{N+\alpha}{2})}Z_k(x,y)\\&+\frac{2}{|\mathbb{S}|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+\frac{N+\alpha}{2})\Gamma(k+\frac{N+\alpha}{2}+\beta+3)}{(k+\frac{N+\alpha}{2}+\beta+1)\Gamma(\beta+2)\Gamma(k+\frac{N+\alpha}{2})}Z_k(x,y)\end{aligned}$$

for $x,y\in\mathbb{B}$.

また、$\mathbb{B}\setminus\{0\}$ 上の調和および重調和ベルグマン空間の再生核については、重み α,β の条件によっては $\mathbb{B}$ による調和および重調和ベルグマン空間の再生核と変わりがないこともわかる。

Theorem 3. *If $\beta>-1$ and $-N<\alpha<N-4$, then*

$$b^{1,2}_{\alpha,\beta}(\mathbb{B}\setminus\{0\})=\{f|_{\mathbb{B}\setminus\{0\}}:f\in b^{1,2}_{\alpha,\beta}(\mathbb{B})\}.$$

Moreover, we have

$$R_{\mathbb{B}\setminus\{0\},1,\alpha,\beta}(x,y)=R_{\mathbb{B},1,\alpha,\beta}(x,y)$$

for $x,y\in\mathbb{B}\setminus\{0\}$, whenever $\beta>-1$ and $-N<\alpha<N-4$.

Theorem 4. *If $\beta>-1$ and $-N<\alpha<N-8$, then*

$$b^{2,2}_{\alpha,\beta}(\mathbb{B}\setminus\{0\})=\{f|_{\mathbb{B}\setminus\{0\}}:f\in b^{2,2}_{\alpha,\beta}(\mathbb{B})\}.$$

Moreover, we have

$$R_{\mathbb{B}\setminus\{0\},2,\alpha,\beta}(x,y)=R_{\mathbb{B},2,\alpha,\beta}(x,y)$$

for $x,y\in\mathbb{B}\setminus\{0\}$, whenever $\beta>-1$ and $-N<\alpha<N-8$.

また、上記の $\mathbb{B}$ 上の調和および重調和ベルグマン空間の再生核の結果から、$\mathbb{B}$ 上の調和および重調和ベルグマン空間の再生核 $R_{1,\mathbb{B},\alpha,\beta}(x,y), R_{2,\mathbb{B},\alpha,\beta}(x,y)$ は $\{1-2x\cdot y+|x|^2|y|^2\neq 0\}$ 上に調和拡張可能である事がわかる。その得られる関数を $\hat{R}_{1,\mathbb{B},\alpha,\beta}(x,y)$,$\hat{R}_{\mathbb{B},2,\alpha,\beta}(x,y)$ などと書く事にすると次が得られる。

Theorem 5. *Let $-N<\alpha<N-2\beta-4$ and $\beta\in\mathbb{N}_0$. Then,*

$$\hat{R}_{\mathbb{B},1,\alpha,\beta}(x,y)=(-1)^{\beta}R_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{\mathbb{B}},1,\alpha,\beta}(x,y)$$

for $x,y\in\mathbb{R}^N\setminus\overline{\mathbb{B}}$.

Theorem 6. *Let $\beta \in \mathbb{N}_0$ and $-N < \alpha < N - 2\beta - 8$. Then,*

$$\hat{R}_{\mathbb{B},2,\alpha,\beta}(x,y) = (-1)^{\beta} R_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}},2,\alpha,\beta}(x,y)$$

for $x, y \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}$.

これらの結果において、特に $\beta = 0$ とすると $\hat{R}_{\mathbb{B},2,\alpha,0}(x,y) = R_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}},2,\alpha,0}(x,y)$ $x, y \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}$ となる事がわかる。講演の段階では $\alpha = \beta = 0$ の状況しか確認できていなかったが、そのときの結果を拡張できたことに注意しておく。

結論と課題

$\mathbb{B}, \mathbb{B} \setminus \{0\}, \mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}$ 上における重み付き重調和ベルグマン空間の再生核について考察した。その結果として重みに関する指数 α, β が $-N < \alpha < N - 2\beta - 8$ かつ $\beta \in \mathbb{N}_0$ を満たすときには $\mathbb{B}$ 上の核の拡張によって得られる $\hat{R}_{\mathbb{B},2,\alpha,\beta}(x,y)$ が $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}$ 上の重調和ベルグマン空間の再生核であることがわかった。このことから $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\mathbb{B}}$ 上の調和ベルグマン空間上のテプリッツ作用素の有界性、コンパクト性等に対する条件の考察が可能ではないかと予測し、現在取り組むべき課題の 1 つであると考える。

謝辞

RIMS 研究集会「再生核の応用についての総合的な研究」研究代表者である群馬大学の齋藤三郎先生には講演の機会を頂き感謝しています。また研究集会にてコメントをくださった名古屋大学の大沢健夫先生を始め研究集会参加者にも感謝しています。

参考文献

[1] N. Aronszajn, T. M. Creese and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon press, Oxford, 1983.

[2] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, Harmonic function theory, Springer-Verlag, New York, 1992.

[3] R. Coifman and R. Rochberg, *Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p*, Astérisque **77** (1980), 1–66.

[4] T. Futamura, K. Kishi and Y. Mizuta, *A generalization of Bôcher's theorem for polyharmonic functions*, Hiroshima Math. J. **31** (2001), 59–70.

[5] M. Jevtić and M. Pavlović, *Harmonic Bergman functions on the unit ball in* $\mathbb{R}^n$, Acta Math. **85** (1999), 81–96.

[6] J. Miao, *Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces*, Integral Equations Operator Theory **27** (1997) 426–438.

[7] M. Nicolescu, Les Fonctions Polyharmoniques, Hermann & Cie, Paris, 1936.

[8] M. Nishio and K. Tanaka, *Harmonic Bergman spaces with radial measure weight on the ball*, submitted.

[9] M. Pavlović, *Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions*, J. Math. Anal. Appl. **216** (1997), 499–509.

[10] K. Stroethoff, *Compact Toeplitz operators on weighted harmonic Bergman spaces*, J. Austral. Math. Soc. **64** (1998), 136–148.

[11] Z.G.Zhao, *The harmonic Bergman kernels for punctured domains*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **30** (2014), 1997–1988.

Kiyoki Tanaka
Osaka City University Advanced Mathematical Institute
Osaka 558-8585
JAPAN
E-mail address: ktanaka@sci.osaka-cu.ac.jp